

ДРУГИ ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део први

18. септембар 2012

Професор: Игор Долинка

Асистент: Бојан Башић

1. Наћи све бројне системе у којима је број 21 палиндром. (Број је *палиндром* уколико се исто чита слева надесно као и здесна налево.)
2. Доказати да је, за све $n > 2$, вредност $\varphi(n)$ парна.
3. Израчунати збир цифара броја

$$1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots111}_{2012 \text{ јединица}}.$$

Једна идеја: Коришћењем једнакости

$$\underbrace{11\dots11}_i = \frac{10^i - 1}{9},$$

најпре доказати да је дати број једнак

$$\frac{\overbrace{111\dots11}^{2008} 09098}{9}.$$

Потом уочити да се бројилац добијеног разломка може поделити са 9 издељивањем на „блокове“, где се за сваки блок осим последњег може искористити једнакост $11111111 = 9 \cdot 12345679$, а последњи се дели са 9 директно. На овај начин стиче се довољно информација на основу којих се може израчунати тражени збир.

ДРУГИ ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део други

18. септембар 2012

Професор: Игор Долинка

Асистент: Бојан Башић

1. Доказати да је 13 примитиван корен по модулу 125.
2. Под претпоставком да важи Голдбахова хипотеза, доказати да се сваки непаран природан број већи од 5 може приказати као збир три проста броја (не обавезно различита).
3. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину $888^x = 125^y + 788543$.